

# 宁波大学研究生课程教学大纲

## 一、课程基本信息

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |        |                                                                                                 |    |   |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|
| 课程中文名称          | 变分分析                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 课程编号   |                                                                                                 |    |   |
| 课程英文名称          | Variational Analysis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 总学时    | 54                                                                                              | 学分 | 3 |
| 开课学院            | 数学与统计学院                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 开课学期   | <input type="checkbox"/> 春季 <input checked="" type="checkbox"/> 秋季 <input type="checkbox"/> 全年  |    |   |
| 课程负责人           | 何洪津                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 教学团队成员 | 罗文昌、张莉楠                                                                                         |    |   |
| 适用学科/专业         | 计算数学，运筹与控制                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 授课语言   | <input type="checkbox"/> 中文 <input type="checkbox"/> 全英文 <input checked="" type="checkbox"/> 双语 |    |   |
| 适用学生            | <input checked="" type="checkbox"/> 学术学位博士 <input checked="" type="checkbox"/> 学术学位直博生 <input checked="" type="checkbox"/> 学术学位直博生（留学生）<br><br><input type="checkbox"/> 学术学位硕士 <input type="checkbox"/> 专业学位硕士 <input type="checkbox"/> 学术学位硕士（留学生）<br><br><input type="checkbox"/> 专业学位硕士（留学生） <input type="checkbox"/> 专业学位硕士（非全日制） |        |                                                                                                 |    |   |
| 课程类别            | <input type="checkbox"/> 公共学位课 <input checked="" type="checkbox"/> 专业学位课 <input type="checkbox"/> 公共选修课 <input type="checkbox"/> 专业选修课 <input type="checkbox"/> 专业补修课 <input type="checkbox"/> 必修培养环节<br><br><input type="checkbox"/> 其他_____                                                                                         |        |                                                                                                 |    |   |
| 主要教学方式<br>(可多选) | <input checked="" type="checkbox"/> 讲授 <input checked="" type="checkbox"/> 讨论 <input type="checkbox"/> 专题讲座 <input type="checkbox"/> 文献研读 <input type="checkbox"/> 专题研讨 <input type="checkbox"/> 案例分析 <input type="checkbox"/> 实验（含上机） <input type="checkbox"/> 自学 <input type="checkbox"/> 其他__                                      |        |                                                                                                 |    |   |
| 考核方式            | <input type="checkbox"/> 考试 <input checked="" type="checkbox"/> 考查                                                                                                                                                                                                                                                                    |        |                                                                                                 |    |   |

## 二、课程中文简介

变分分析是运筹与控制专业博士研究生的基本课程，是凸优化和非凸优化问题的数学理论基础。该课程旨在培养学生凸和非凸优化下的理论分析能力。内容主要包括最大最小理论、凸性、集值映射、次可导和次梯度、次微积分、对偶等内容。

## 三、课程英文简介

《Variational analysis》 is a basic course for doctoral students majoring in operations research and control. It is the mathematical theoretical basis of convex optimization and non-convex optimization problems. The aim of this course is to develop students' ability of theoretical analysis under convex and non-convex optimization. The content mainly includes maximum and minimum theory, convexity, set-valued mappings, subderivatives and subgradient, subdifferential calculus, duality and so on.

## 四、教学目标

变分分析是是运筹与优化专业博士研究生的重要基础课程，在优化算法的收敛性分析上起着关键的作用。通过《变分分析》中的理论，达到本课程如下目标：

课程目标(1)：掌握变分分析中常用的基本理论，包括最大最小理论、凸性理论、集值映射理论、次可导、次微积分、对偶等理论；

课程目标(2)：能够应用以上理论进行具体优化问题的数学分析。

课程目标(3)：加强学生对优化问题的理论推导能力和证明的严谨性，培养学生的科学思维和吃苦耐劳、坚韧不拔的科研精神，增强学生的民族自豪感和爱国主义情怀，帮助学生树立正确的人生观、价值观。

## 五、教学内容、基本要求及学时分配

### 1. 各章节主要内容

#### 第一章 最大最小理论

主要内容：广义实值函数，上图与下半连续函数，函数最小化定理，函数的连续性，闭性和增长性质，Moreau 包络，一致水平有界与参数最小化定理

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求掌握广义实值函数的一般变分性质，Moreau 包络，邻近算子等理论，为之后变分分析内容打好坚实的基础，锻炼学生的理论抽象能力。

重点：下半连续函数、Moreau 包络、一致水平有界与参数最小化定理

难点：Moreau 包络、一致水平有界与参数最小化定理

#### 第二章 凸性

主要内容：凸集的性质，凸优化的定义，水平集，超平面，仿射集，凸函数的等价形式，凸性的运算，凸包，凸集分离定理，相对内点

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求掌握凸集的性质，会判断一个集合是否为凸集；理解凸集分离定理和相对内点等概念。

重点：凸集的性质、凸函数等价定义、分离定理、相对内点

难点：分离定理

#### 第三章 集值映射

主要内容：函数的定义域，函数的逆，函数的连续与半连续，局部有界性下的外半连续，函数的总连续性，函数的点点收敛和图收敛，序列的等连续性，连续与一致连续

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求掌握函数连续性和半连续性等基础概念，熟悉函数在各种连续情况下的条件，序列的不同收敛情况，进一步养成良好的数学分析基础。

重点：函数的连续与半连续性、点点收敛与图收敛、一致连续

难点：半连续性、一致收敛

#### 第四章 次可导和次梯度

主要内容：函数的次可导，函数的次梯度及其相关性质，凸函数的次梯度和最优化准则，一般次可导，支撑函数与次微分的对偶性质，函数的 calmness 性质

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求掌握次梯度的各种性质，最优性条件，为具体的优化问题建立坚实的数学理论分析基础。

重点：次微分的性质，对偶性质，函数的 calmness 性质

难点：函数的 calmness 性质

#### 第五章 次微积分

主要内容：水平集上的最优性和正规性，次微分的链式法则，参数极小化下的次可微性，分段线性二次函数，可调节集合和函数，半可导和次光滑

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求了解函数的次微分内容，掌握次微分计算法则

重点：次微分的链式法则、参数极小化的次可微性

难点：参数极小化的次可微性

#### 第六章 对偶

主要内容：Legendre-Fenchel 变换，共轭的特殊情况，分段二次线性函数的共轭，对偶运算，对偶的收敛性

教学方法与要求：使用课堂讲授与讨论的方法进行教学，要求了解函数的 Legendre-Fenchel 变换，对偶运算等内容。

重点：Legendre-Fenchel 变换，分段二次函数函数的共轭

难点：Legendre-Fenchel 变换

2. 学时分配表

| 章节 | 标题      | 教学内容                          | 学时分配 |    |    |    | 备注 |
|----|---------|-------------------------------|------|----|----|----|----|
|    |         |                               | 理论   | 实验 | 讨论 | 其他 |    |
| 1  | 最大最小理论  | 上图与下半连续函数，Moreau 包络等          | 9    |    |    |    |    |
| 2  | 凸性      | 凸集，凸函数的性质，分离定理等               | 9    |    |    |    |    |
| 3  | 集值映射    | 函数的连续与半连续，序列的等连续性等            | 9    |    |    |    |    |
| 4  | 次可导和次梯度 | 函数次可导，次微分的性质，函数的 calmness 性质等 | 9    |    |    |    |    |
| 5  | 次微积分    | 次微分的链式法则，半可导和次光滑等             | 9    |    |    |    |    |
| 6  | 对偶      | Legendre-Fenchel 变换，对偶运算等     | 9    |    |    |    |    |
| 小计 |         |                               | 54   |    |    |    |    |

六、考核方式及成绩评定方法

- 1. 考核方式：采取课程论文与课堂讨论的方式
- 2. 成绩评定：总成绩=课堂讨论(30%) + 课程论文(70%)
- 3. 考核标准及要求：需提交完整的课程论文，包括摘要，介绍，主要内容，结论和参考文献。

七、本课程创新点（内容、方法等）

该课程包含不仅包括经典凸分析内容，还扩展了非凸分析的内容

八、教材及主要参考书目、文献与资料

教材至少 1 本，参考书目至少 3 本

| 类别 | 教材名称                 | 编者                                           | 出版社      | 版次  | 出版时间 |
|----|----------------------|----------------------------------------------|----------|-----|------|
| 教材 | Variational Analysis | R. Tyrrell Rockafellar ,<br>Roger J. B. Wets | Springer | 1st | 1998 |
|    | 变分分析与优化              | 张立卫、吴佳、<br>张艺                                | 科学出版社    | 1st | 2013 |

|     |                                       |                                           |                            |     |      |
|-----|---------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|-----|------|
| 参考书 | Variational Analysis and Applications | Boris S. Mordukhovich                     | Springer                   | 1st | 2018 |
|     | Convex Analysis                       | R. Tyrrell Rockafellar                    | Princeton University Press | 1st | 1996 |
|     | Convex Analysis and Beyond            | Boris S. Mordukhovich ,<br>Nguyen Mau Nam | Springer                   | 1st | 2022 |

课程负责人（签名）：

日期：

学位点负责人（签名）：

日期：

所在学院主管领导（签名）（公章）：

日期：