

宁波大学研究生课程教学大纲

一、课程基本信息

课程中文名称	泛函分析	课程编号			
课程英文名称	Functional Analysis	总学时	54	学分	3
开课学院	数学与统计学院	开课学期	☐ 春季 ☒ 秋季 ☐ 全年		
课程负责人	陈传强	教学团队成员			
适用学科/专业	基础数学和应用数学	授课语言	☒ 中文 ☐ 全英文 ☐ 双语		
适用学生	☐ 学术学位博士 ☐ 学术学位直博生 ☐ 学术学位直博生（留学生） ☒ 学术学位硕士 ☐ 专业学位硕士 ☐ 学术学位硕士（留学生） ☐ 专业学位硕士（留学生） ☐ 专业学位硕士（非全日制）				
课程类别	☐ 公共学位课 ☒ 专业学位课 ☐ 公共选修课 ☐ 专业选修课 ☐ 专业补修课 ☐ 必修培养环节 ☐ 其他_____				
主要教学方式 (可多选)	☒ 讲授 ☐ 讨论 ☐ 专题讲座 ☐ 文献研读 ☐ 专题研讨 ☐ 案例分析 ☐ 实验（含上机） ☐ 自学 ☐ 其他				
考核方式	☒ 考试 ☐ 考查				

二、课程中文简介

《泛函分析》课程系统介绍泛函分析的一些基本概念和方法，使学生掌握一些重要的无穷维空间和算子的基本概念和理论方法，进一步提高抽象思维能力和逻辑推理能力，学会解决实际问题。

三、课程英文简介

The course of “Functional Analysis” mainly discusses the general definitions and methods of Functional analysis, such that the students can learn some knowledge of spaces and operators. Moreover, this can improve the students’ abstract thinking ability, logical reasoning ability, and the ability to solve the practical problems.

四、教学目标

《泛函分析》课程系统介绍泛函分析的一些基本概念和方法，使学生掌握一些重要的无穷维空间和算子的基本概念和理论方法，进一步提高抽象思维能力和逻辑推理能力，学会解决实际问题。

五、教学内容、基本要求及学时分配

1.各章节主要内容

第一章 度量空间

主要内容：

1、度量空间

- (1) 度量空间的概念，内容包括定义，例子（函数空间和序列空间），点列的收敛性，映射的连续性，内容包括开（闭）球，内点、开集、领域等概念，距离的等价性，映射的连续性等；
- (2) 度量空间的闭集，内容包括距离空间的闭集，集合的闭包，集合的稠密性和距离空间的可分性，列紧集和度量空间的列紧性；
- (3) 度量空间的完备性，内容包括 Cauchy 列，完备度量空间的定义，完备空间与不完备空间举例，度量空间的完备化；
- (4) 完备度量空间的性质，内容包括闭集套定理，Banach 压缩映照原理及其应用。

2、赋范线性空间

- (1) 赋范空间的概念，内容包括赋范空间和 Banach 空间定义，例子（函数空间和序列空间），范数连续性，范数与距离的关系，点列的收敛性；
- (2) 完备赋范空间，内容包括赋予不同范数的连续函数空间，赋范空间的完备化，重要的完备空间 L^p 空间和 l^p 空间；
- (3) 赋范空间的几何结构，内容包括凸集，子空间和 Riesz 引理；
- (4) 有限维赋范空间，内容包括范数等价性，有限维赋范空间的几何特征。

3、内积空间

- (1) 内积空间的基本性质，包括内积、内积空间，内积和范数的关系、内积空间特征、Hilbert 空间的定义，一些典型的内积空间、Hilbert 空间例子；
- (2) 正交和正交分解，包括正交和正交补的定义，凸集的最佳逼近，Hilbert 空间正交分解定理；
- (3) 正交系和正交投影，包括内积空间正交系和正交投影定义，Fourier 级数，Bessel 不等式与 Fourier 级数的收敛性；
- (4) 正交基和正交列的完备性，包括正交基和正交列的完备性定义，正交列的完备性的四个等价性描述；
- (5) 可分 Hilbert 空间的等距同构，包括线性无关组正交化算法，可分 Hilbert 空间与 l^2 等距同构。

重点：理解度量空间、赋范线性空间和内积空间的定义，连续、可分、完备等概念。

难点：掌握可分、完备，以及相关的性质。

课程思政融合点：了解度量空间、赋范线性空间和内积空间的关系，了解其产生背景、发展历史和应用背景；理解泛函分析在整个科学发展历史中的意义，激发学习热情和追求科学真理的志向。

第二章：线性算子与线性泛函

主要内容：

- (1) 有界线性算子和有界线性泛函，包括它们的定义，一些有界线性算子和有界线性泛函的例子，线性算子有界性和连续性的关系，线性算子赋范空间定义（过程），一些具体有界线性算子或泛函范数的计算。
- (2) 有界线性算子空间的收敛和完备性，内容包括有界线性算子列的范数收敛定义及其等价性，有界线性算子列的强收敛的定义以及与范数收敛的关系，算子空间（泛函空间）的完备性。
- (3) 一致有界原理，包括 Baire 纲定理，及其各种表现形式，Banach-Steinhaus 一致有界原理及其逆否命题，有界线性算子空间强收敛意义下的完备性。

- (4) 开映射定理与逆算子定理，包括逆算子定义，有界逆算子存在的充分条件，开映射定理及其证明，逆算子定理，Banach 空间的范数等价定理。
- (5) 闭算子和闭图像定理，包括闭算子的定义，与闭图像的等价性，线性算子的闭性，与有界性和闭定义域的关系，一些重要闭算子的例子，闭图像定理。
- (6) Hahn-Banach 延拓定理（复形式和实形式）及其几个重要推论，它们在凸集分离中的应用；
- (7) 共轭空间，包括共轭空间的定义，几个重要空间的共轭空间；
- (8) Hilbert 空间的共轭空间，包括 Riesz 表示定理，Hilbert 空间的共轭空间在共轭同构意义下和自身等同，Hilbert 空间的共轭算子，包括它的定义和性质，有界线性算子的值域与它的共轭算子零空间的关系；
- (9) Hilbert 空间中的自共轭的有界线性算子，包括它的定义和性质，几个重要的自共轭的有界线性算子，有界线性算子的 Cartesian 分解；
- (10) Banach 空间的共轭算子，包括它的定义和性质，Hilbert 空间与 Banach 空间的定义共轭算子的关系，空间自反性的定义，几类重要的自反空间，弱收敛及其相关性质，强收敛与弱收敛的关系；
- (11) 线性算子的谱理论，包括定义与例子，预解式、谱半径及计算定理。

重点：理解线性算子的连续性与有界性；Riesz 定理及其应用；开映射定理；逆算子定理和共鸣定理；Hahn-Banach 定理；线性算子的谱。

难点：开映射定理；逆算子定理和共鸣定理；Hahn-Banach 定理；线性算子的谱。

课程思政融合点：通过对一些历史重要的定理的讲解，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感。并且引导学生学会并能够初步应用泛函分析的理论方法解决分析、代数中的问题，培养学生初步综合运用分析、代数、几何手段处理问题的方法和能力，为进一步学习现代数学或从事数学研究打下坚实基础。

2.学时分配表

章节	标题	教学内容	学时分配				备注
			理论	实验	讨论	其他	
1	度量空间	1、度量空间中的点集；连续映照；稠密性；完备性；凸集与不动点；列紧集； 2、赋范线性空间：范数与 Banach 空间，模等价性，有穷维赋范空间的刻画； 3、内积空间的基本概念；定义与性质；正交与正交基；最佳逼近。	21		3		
2	线性算子与线性泛函	1、线性算子与线性泛函基本概念；连续性与有界性； 2、Riesz 定理及其应用； 3、纲与开映射定理；逆算子定理和共鸣定理； 4、Hahn-Banach 定理； 5、共轭空间；弱收敛； 6、线性算子的谱。	24		3	3	
小计			45		6	3	

六、考核方式及成绩评定方法

1. 考核方式：平时成绩+期末考试
2. 成绩评定：平时成绩（30%）+期末考试（70%），其中课程思政占比 8%。
3. 考核标准及要求：

平时成绩，主要是课堂表现和作业，

期末考试：培养学生的抽象思维能力、严格的逻辑推导能力，着重训练学生理论推导能力和计算能力

七、本课程创新点（内容、方法等）

泛函分析是现代数学分析学的重要分支，其广博深厚的理论体系、高度概括的理论方法以及广泛的应用价值对现代科学技术的各个领域都产生重大影响。泛函分析综合了函数论、几何和代数的观点与方法研究无穷维空间上的函数、算子理论，以更加抽象的纯形式的方法解决了分析学中的诸多问题。本课程是数学系课程中的核心课程，是学生进入现代数学学习和研究的最重要专业基础课之一。泛函分析课程主要以线性泛函分析中的赋范线性空间，以及定义在其上的有界线性算子为基本内容。

八、教材及主要参考书目、文献与资料

教材至少 1 本，参考书目至少 3 本

类别	教材名称	编者	出版社	版次	出版时间
教材	泛函分析讲义（上册）	张恭庆 林源渠	北京大学	一	2010
参考书	实变函数与泛函分析（下册）	夏道行	高等教育	二	2010.9
	Functional Analysis	Walter Rudin (美)	Mc Graw Hill Educatio	二	1999.12
	非线性泛函分析	郭大钧	科学出版社	第五版	2007

课程负责人（签名）：

日期：

学位点负责人（签名）：

日期：

所在学院主管领导（签名）（公章）：

日期：